Exercices d'oraux de la banque CCP 2014-2015

20 exercices sur les 37 d'algèbre peuvent être traités en Maths Sup.

BANQUE ALGÈBRE

EXERCICE 59

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E$, $f(P) = P - P'$.

1) Démontrer que f est bijectif de deux manières :

(a) sans utiliser la matrice de f,

(b) en utilisant la matrice de f.

2) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.

Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

EXERCICE 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1) Déterminer $\text{Ker}(f)$.

2) f est-il surjectif ?

3) Trouver une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.

EXERCICE 62

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = Id$.

1) Démontrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.

2) Démontrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.

3) Démontrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$.

EXERCICE 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1) Démontrer que $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f \Rightarrow \text{Im}f = \text{Im}f^2$.

2) **(a)** Démontrer que $\text{Im}f = \text{Im}f^2 \Leftrightarrow \text{Ker}f = \text{Ker}f^2$.

(b) Démontrer que $\text{Im}f = \text{Im}f^2 \Rightarrow E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f$.

EXERCICE 71

Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1) Verifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

EXERCICE 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$.
On pose $\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1) (a) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Dans quel cas a-t-on l'égalité ? Le démontrer.

2) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b],\ f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\ dt,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

EXERCICE 77

Soit E un espace euclidien.

1) Soit A un sous-espace vectoriel de E.
Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.

2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

(a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

(b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

EXERCICE 78

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x \mid y)$ le produit scalaire de x et y et $\|\ .\ \|$ la norme euclidienne associée.

1) Soit u un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

(a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.

(b) Démontrer que u est bijectif.

2) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

EXERCICE 79

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1) Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\ dx = 0 \Longrightarrow h = 0$.

2) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose $\forall (f,g) \in E^2,\ (f \mid g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\ dx$.
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3) Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\ dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

EXERCICE 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur E.

2) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

EXERCICE 81

On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(A, A') = \mathrm{Tr}({}^tAA')$ où $\mathrm{Tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$

3) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

4) Calculer la distance de J à F.

EXERCICE 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1) Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures.

EXERCICE 84

1) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.

3) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

EXERCICE 85

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

  (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(x)$ dans la base $\big(1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n\big)$.

  (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
  a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r - 1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.

2) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 86

Soit p un nombre premier.

1) **(a)** Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.

(b) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis que p divise $\binom{p}{k}$.

2) **(a)** Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \mod p$.
Indication : procéder par récurrence.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

EXERCICE 87

Soient a_0, a_1, ..., a_n $n+1$ réels deux à deux distincts.

1) Montrer que si b_0, b_1, ..., b_n sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg(P) \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k lorsque :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ b_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}.$$

3) Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k^p L_k = X^p$.

EXERCICE 88

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.

1) Déterminer a et b pour que 1 soit racine d'ordre au moins 2 de P.

2) Dans ce cas, vérifier que le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$.

EXERCICE 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\,\frac{2\pi}{n}}$.

1) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \dfrac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE 90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1) Montrer que $\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ & P & \Longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

(a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base $\mathbb{K}_2[X]$.

(b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4) *Application :*
on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1)$, $B(1,3)$, $C(2,1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

EXERCICE 95

1) Enoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

2) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouver que : $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Longleftrightarrow ab \mid c$.

3) On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 6 & \text{mod}(17) \\ x \equiv 4 & \text{mod}(15) \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

(a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

(b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).